数理解析研究所講究録
961巻 1996年 117-124

Mahlerの方法の発展

慶応大経済 西岡久美子 (Kumiko Nishioka)

筆者が超越数論におけるMahlerの方法を知ったのは17年前である。その後、色々な分野における結果を使うことにより、Mahlerの方法は発展し、またその応用も広がっている。1994年に筆者は「Mahler関数と超越数II」(Seminar on Math. Sci., No. 21, 慶応大学理工学部)を著し、それまでの研究の到達点を明らかにした。ここではその内容及び、その後に得られた結果にもふれたいと思う。参考文献については、上記講義録を参照して頂きたい。

I. 一変数Mahler関数

Kを代数体とし、dは2以上の整数とする。巾級数 $f(z) \in K[[z]]$ は $\{|z| < R\}$ で収束し、次の関数方程式をみたすとする。

(1) $$f(z^d) = \sum_{i=0}^{m} a_i(z) f(z)^i \Big/ \sum_{i=0}^{m} b_i(z) f(z)^i,$$

ここで $m < d$ で，$a_i(z), b_i(z) \in K[z]$ である。$\Delta(z) \in K[z]$ を $\sum_{i=0}^{m} a_i(z) u^i$ と $\sum_{i=0}^{m} b_i(z) u^i$ の u に関する終結式とする。

定理 1 (Mahler, 1929). $f(z)$ が有理関数体 $K(z)$ 上超越的で、代数的数 α が $0 < |\alpha| < \min\{1, R\}$, $\Delta(\alpha^{d^k}) \neq 0$ $(k \geqq 0)$ をみたせば $f(\alpha)$ は超越数である。

例. $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{d^k}$ は $f(z^d) = f(z) - z$ をみたす。従って，$0 < |\alpha| < 1$ をみたす代数的数 α に対して，$f(\alpha)$ は超越数である。

定理 1 は次の様に一般化された。$f(z)$ は次の関数方程式をみたすとする。

(2) $$Q_0(z, f(z)) f(z^d)^n + Q_1(z, f(z)) f(z^d)^{n-1} + \cdots + Q_n(z, f(z)) = 0,$$

ここで $Q_i(z, u) \in K[z, u]$ $(i = 0, \cdots, n)$ は互いに素とする。すると

$$g(z) = \sum_{i=1}^{n} g_i(z, u) Q_i(z, u) \in K[z]$$

となるような $g_i(z, u) \in K[z, u]$, $g(z)$ が存在する。

$$m = \max_{0 \le i \le n} \deg_u Q_i, \quad M = \max\{d, m\}$$

とおく。

定理2 (Nishioka, 1982). $f(z)$ は $K(z)$ 上超越的で $Mn^2 < d^2$ とする。代数的数 α が $0 < |\alpha| < \min\{1, R\}$ $g(\alpha^{d^k}) \neq 0$ $(k \geq 0)$ をみたせば $f(\alpha)$ は超越数である。

系. 定理1は $m < d^2$ の仮定の下に成り立つ。

$p_c(z) = z^2 + c$ とおくとき. Mandelbrot set M は次の様に定義される。

$$M = \{c \mid \overbrace{p_c \circ \cdots \circ p_c}^{k}(0) \not\to \infty \quad (k \to \infty)\}.$$

Mの外側から $\{|z| > 1\}$ への等角写像 Φ が知られている。定理2の応用として次が得られる。

定理3 (Becker and Bergweiler, 1993).
$\alpha \in \mathbb{C} \setminus M$ が代数的数なら $\Phi(\alpha)$ は超越数である。

$J(z) = j(\log z / 2\pi i)$ ($j(u)$ は modular invariant) とおく。$J(z)$ はすべての2以上の整数 d に対して (2) 型の関数方程式をみたす。しかし n がdより大きいので

定理2を使う事はできない。最近、すべての d に対して関数方程式をみたすということと、$J(z)$ の Taylor 展開の係数の絶対値の精密な評価（Mahler による）を使って次の定理が証明された。

定理4（Barré-Sirieix, Diaz, Gramain, Philibert, to appear in Invent. Math.）. $0<|\alpha|<1$ をみたす代数的数 α に対し、$J(\alpha)$ は超越数である。

次に代数的独立性について述べよう。巾級数 $f_1(z),\cdots,f_m(z)\in K[[z]]$ は $\{|z|<R\}$ で収束し、次をみたすとする。

$$(3)\quad \begin{pmatrix} f_1(z)\\ \vdots \\ f_m(z)\end{pmatrix} = A(z)\begin{pmatrix} f_1(z^d)\\ \vdots \\ f_m(z^d)\end{pmatrix} + B(z),$$

ここで $A(z)$ は m 次正方行列、$B(z)$ は m 次元ベクトルで、それらの成分は有理関数体 $K(z)$ の元である。

定理5（Nishioka, 1990）. 代数的数 α が $0<|\alpha|<\min\{1,R\}$ をみたし α^{d^k} $(k\geq 0)$ は $A(z)$, $B(z)$ の成分の極でなく、$\det A(z)$ の零点でもないとする。このとき

$$\text{trans.}\deg_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(f_1(\alpha),\cdots,f_m(\alpha))$$
$$=\text{trans.}\deg_{K(z)}K(z)(f_1(z),\cdots,f_m(z)).$$

定理1 (Amou, 1991). $A(z)$, $B(z)$ の成分は $K[z]$ の元とする。$f_1(z), \cdots, f_m(z)$ が $K(z)$ 上代数的独立で α が $0<|\alpha|<1$ をみたす超越数なら

$$\operatorname{trans\,deg}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\alpha, f_1(\alpha), \cdots, f_m(\alpha)) \geq \left[\frac{m+1}{2}\right].$$

regular sequence から生成される巾級数が (3) の様な関数方程式をみたすことが知られている。また Becker, Töpfer により 一般的な変換 $z \to p(z)$ ($p(z) \in K(z)$) が扱われている。

II. 多変数 Mahler 関数

$\Omega = (\omega_{ij})$ は非負 n 次正方行列で $\omega_{ij} \in \mathbb{Z}$ とする。$z = (z_1, \cdots, z_n)$ に対し

$$\Omega z = \left(\prod_{j=1}^{n} z_j^{\omega_{1j}}, \cdots, \prod_{j=1}^{n} z_j^{\omega_{nj}} \right)$$

とおいて変換 $\Omega : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ を定義する。以後 Ω, 代数的点 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ はある適当な条件をみたすとする。(ここでは詳しくは述べない). $z \to z^d$ の代わりに $z \to \Omega z$ として定理1が成り立つ。

例. ω は正二次無理数とし

$$F_\omega(z_1, z_2) = \sum_{h_1=1}^{\infty} \sum_{h_2=1}^{[h_1\omega]} z_1^{h_1} z_2^{h_2}$$

とおく。$F_\omega(z_1, z_2)$ は $\{|z_1|<1,\ |z_1||z_2|^\omega<1\}$ で収束する。

$$f_\omega(z) = F_\omega(z, 1) = \sum_{h=1}^{\omega} [h\omega] z^h$$

とおく。簡単のために ω の連分数展開は純巡環で $\omega<1$ とする. $\omega=[0; a_1, a_2, \cdots]$ とし ν を偶数の周期とし

$$\Omega = \begin{pmatrix} a_\nu & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと.

$$F_\omega(z_1, z_2) = F_\omega(\Omega(z_1, z_2)) + b(z_1, z_2),$$

$$b(z_1, z_2) \in \mathbb{Q}(z_1, z_2)$$

である。これより $0<|\alpha_1|<1,\ 0<|\alpha_1||\alpha_2|^\omega<1$ をみたす代数的数 α_1, α_2 に対して. $F_\omega(\alpha_1, \alpha_2)$ は超越数であることがわかる。とくに $0<|\alpha|<1$ をみたす代数的数 α に対して $f_\omega(\alpha)$ は超越数である。

多変数 Mahler 関数に対して定理 5, 6 の様な結果はまだ得られていないが $A(z)$ の成分がすべて定数の時

トは次の結果がある。

定理7 (Nishioka, to appear in Tôhoku Math. J.) $f_1(z), \cdots, f_m(z) \in K[[z_1, \cdots, z_n]]$ は多重円板 U で収束し、関数方程式

$$\begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_m(z) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f_1(\Omega z) \\ \vdots \\ f_m(\Omega z) \end{pmatrix} + B(z)$$

をみたすとする。ここで A は K の元を成分に持つ m 次正方行列，$B(z)$ は $K(z)$ の元を成分に持つ m 次元ベクトルである。$f_1(z), \cdots, f_r(z)$ $(r \leqq m)$ が $K(z)$ を法として K 上線形独立なら、代数的点 $\alpha \in U$ に対して $f_1(\alpha), \cdots, f_r(\alpha)$ は代数的独立である。

系.

$$\begin{aligned} &\text{trans. deg}_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{Q}(f_1(\alpha), \cdots, f_m(\alpha)) \\ &\qquad = \text{trans. deg}_{K(z)}\, K(z)(f_1(z), \cdots, f_m(z)). \end{aligned}$$

Ⅲ. 異なる変換に関する代数的独立性

$d_1, \cdots, d_t$ は 2 以上の整数で $i \neq j$ なら $\log d_i / \log d_j \notin \mathbb{Q}$ とする。$f_{ij} \in K[[z]]$ $(1 \leq i \leq t,$ $1 \leq j \leq M_i)$ は $\{|z| < R\}$ で収束し、次の関数方程式をみたすとする。

$$f_{ij}(z^{d_i}) = f_{ij}(z) + b_{ij}(z), \qquad b_{ij}(z) \in K(z).$$

定理8 (Nishioka, 1994). 各 i について $f_{i1}(z), \cdots,$ $f_{iM_i}(z)$ が $K(z)$ 上代数的独立なら, $0 < |\alpha| < \min\{1, R\}$ をみたす代数的数 α に対して

$$f_{ij}(\alpha), \quad 1 \leq i \leq t, \quad 1 \leq j \leq M_i$$

は代数的独立である。

例. $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{d^k}$, $d \geq 2$ は代数的独立である。